

Crisóstomo, E., Gallardo, S., Martínez-Santaolalla, M. J., Molina, M., Peñas, M., Cañadas, M. C. (2006). *Recursos para una experiencia en el aula con fractales*. En Lupiáñez, José Luis; Cardeñoso, José María; García, M. (Eds.), *Investigación en el aula de matemáticas: la geometría* (pp. 273-280). Granada: SAEM Thales y Dpto. de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

RECURSOS PARA UNA EXPERIENCIA EN EL AULA CON FRACTALES

Edson Crisóstomo, Sandra Gallardo, Manuel J. Martínez-Santaolalla, Marta Molina,

María Peñas, M^a Consuelo

Grupo Pi (grupo_pi@yahoo.es)

Resumen

En esta comunicación se describe y analiza una experiencia en un aula TIC con alumnos de tercero de ESO en la que se utiliza Internet como fuente de información para profundizar en una construcción matemática de gran atractivo visual y de gran aplicabilidad en la modelización de la naturaleza, los fractales.

Introducción

Las matemáticas aparecen estrechamente vinculadas a los avances que la civilización ha alcanzado a lo largo de la historia. En los últimos años, se ha producido un vertiginoso desarrollo tecnológico, que se ve reflejado en aulas, los centros TIC son cada vez más numerosos. Además, cada vez son más los alumnos que disponen de recursos informáticos en sus casas. El ordenador se está convirtiendo en un material habitual del que disponen los alumnos de educación secundaria. En ocasiones éste se convierte para el profesor en el sustituto de la pizarra y los alumnos lo utilizan para la parte práctica.

En este trabajo nos planteamos la utilización de las nuevas tecnologías, concretamente Internet, para que los alumnos se introduzcan en un concepto matemático desconocido para ellos, cuestionándonos si los alumnos están capacitados para usar esta herramienta de una manera eficaz. Queremos comprobar si los alumnos son capaces de buscar material e información que les permita ampliar o clarificar los conocimientos adquiridos en el aula. A su vez presentamos una propuesta de trabajo que persigue uno de los objetivos generales que se plantean dentro del área de matemáticas de este nivel educativo: aplicar conocimientos geométricos para comprender y analizar el mundo físico que les rodea (B.O.E. núm. 35), además el objetivo que también aparece en el currículo “*Desarrollar técnicas y métodos relacionados con los hábitos de trabajo, la*

curiosidad y el interés para investigar y resolver problemas, la responsabilidad y colaboración en el trabajo en equipo con la flexibilidad suficiente para cambiar el propio punto de vista en la búsqueda de soluciones”, es el que rige nuestra experiencia de aula puesto que la búsqueda de información en Internet, el uso de las TIC y el posterior trabajo en equipo para redactar definiciones propias de lo que es un fractal constituirán las técnicas y métodos a las que se refiere dicho objetivo.

En este trabajo nos centramos en los fractales como concepto matemático porque, aunque no aparece en el currículo de educación secundaria y rara vez los alumnos de este nivel educativo han oído hablar de ellos, se trata de un modelo matemático de gran utilidad para comprender las complicadas formas de la naturaleza. Los fractales muestran que hay formas de usar las matemáticas de forma no convencionales, distintas de las trabajadas diariamente en el aula, y permiten suscitar interés por las matemáticas (Martínez Aroza, 2002). Nos centramos aquí en los aspectos visuales de los fractales sin considerar la fórmula matemática de la que son expresión, al no estar al alcance de los de alumnos de secundaria. En otros niveles los fractales pueden trabajarse en relación con el concepto de límite, funciones exponenciales y el cálculo de áreas y perímetros de figuras infinitamente complejas, entre otros contenidos (Taylor, 1999).

Un concepto matemático desconocido en secundaria: los fractales

El término fractal es un adjetivo que tienen todos los elementos que poseen forma. Se trata de un concepto matemático que fue acuñado por el matemático francés Benoit Mandelbrot en la década de los 70, derivándola del adjetivo latín “fractus”. El correspondiente verbo latino “frangere”, significa romper, crear fragmentos irregulares. Así, los fractales son objetos matemáticos cuya creación o forma no encuentra sus reglas más que en la irregularidad o fragmentación. Sin embargo, bajo esta irregularidad, existe una estructura básica que se repite en diferentes escalas. Los fractales son generados por un proceso recursivo o iterativo capaz de producir estructuras autosimilares independientemente de la escala específica. En otras palabras, si enfocamos una porción cualquiera de un objeto fractal, notaremos que tal sección resulta ser una réplica a menor escala de la figura principal. Por tanto, los fractales son estructuras geométricas que combinan irregularidad y estructura.

Desde la perspectiva geométrica, los objetos que nos son familiares suelen tener una, dos o tres dimensiones. El aspecto que caracteriza a todos los fractales es que su

dimensión raramente puede ser expresada con un número entero. Esto es, precisamente, lo que les ha dado su nombre.

Los fractales se aplican no solamente en las matemáticas, sino en un gran número de áreas de conocimiento, entre ellas la medicina, la música, la pintura, la biología, la física o la ingeniería. En el área de la telecomunicación se utilizan para la compresión de imágenes o el análisis de redes de tráfico de datos. Los fractales también son utilizados para la modelización de superficies naturales, tales como costas o montañas, u otros elementos de la naturaleza como las nubes y los rayos u efectos luminosos (Peitgen, y Saupe, 1988; Lornell y Westerberg, 1999; Sanpedro, 2005).

Desarrollo de la experiencia

Trabajamos con un grupo de 25 alumnos de 3º ESO en un aula TIC, donde disponen de un ordenador para cada dos alumnos. La experiencia se va a dividir en dos sesiones de una hora de duración cada una.

Primera sesión

En primer lugar se les ha preguntado a los alumnos si conocían el término fractal o si lo habían oído alguna vez. Para todos era totalmente desconocido. Se propone a los alumnos la búsqueda en Internet de información sobre los términos: ‘fractal’ o ‘fractales’. Para ello el profesor les pide que nombren algunos buscadores. Los alumnos proporcionan los tres siguientes, www.google.es, www.wanadoo.es, www.arrakis.es, www.elrincondelvago.com, que son apuntados en pizarra junto con www.altavista.com, www.terra.es. Deberán trabajar en parejas y escribir en papel la información que vayan encontrando y que conteste a las siguientes preguntas: ¿qué es un fractal?, ¿qué relación tiene con las matemáticas?, ¿qué utilidad tienen los fractales? Se les pide que no copien por copiar. Sólo deben tomar nota de aquellos aspectos que sean capaces de entender. Además anotarán las direcciones en las que vayan encontrando información y seleccionando alguna imagen fractal.

Segunda sesión

Una vez recogidas las respuestas de los alumnos de la primera sesión, se recoge toda la información obtenida en un único documento, de manera que sólo se omite la información repetida. Además, se seleccionan dos imágenes de entre las elegidas por los alumnos. Una de ellas es la construcción de las curvas poligonales de Koch, que pensamos, puede ayudar a los alumnos a entender un poco mejor la idea de fractal y su construcción. Otra es una imagen elegida por la belleza y la creatividad de la misma.

Las curvas poligonales de Koch son formadas a través de un proceso recursivo, a partir de un segmento (nivel 1), y por las sucesivas sustituciones de la tercera parte central de cada segmento por dos otros de misma longitud y que forman un ángulo de 60° , como se puede apreciar en la continuación.

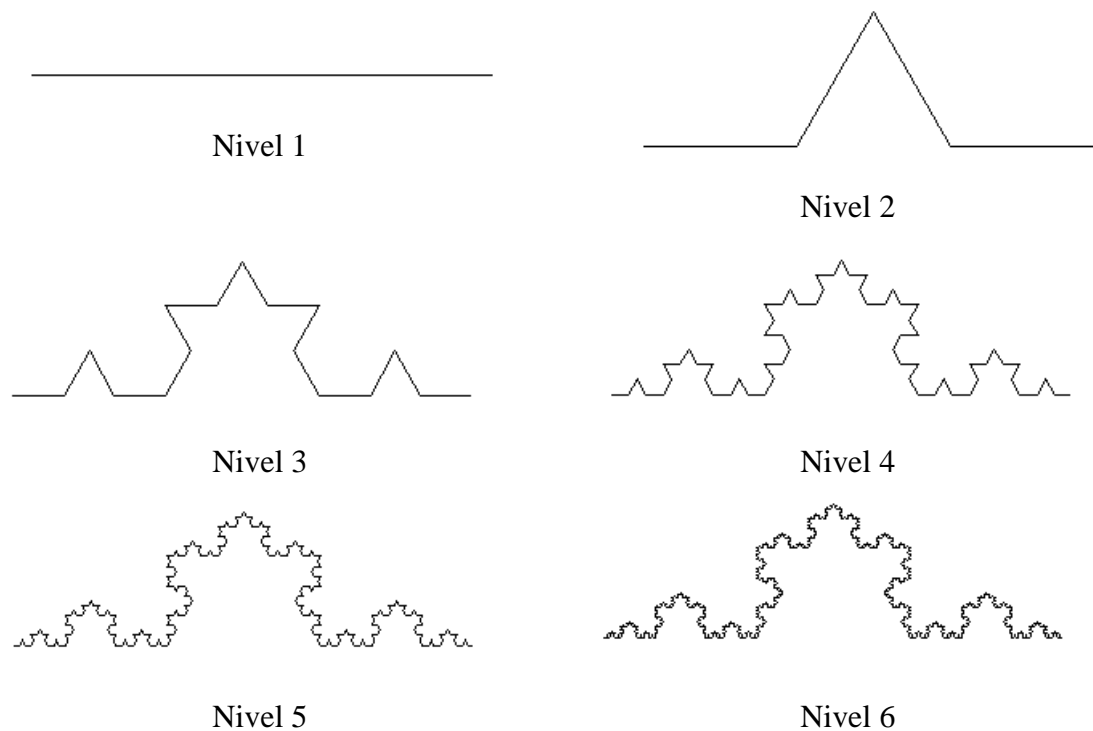
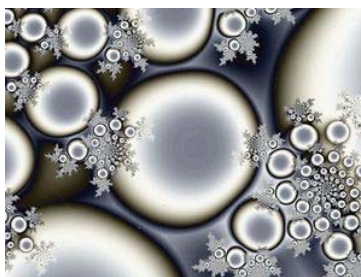


Figura 1. Curvas poligonales de Koch.



La segunda imagen que hemos elegido es el fractal "Anglaria Quartetta", por considerar que puede despertar el interés de los estudiantes en lo que se refiere a los aspectos estéticos y de belleza de algunas construcciones matemáticas. Debemos explicar que estos fractales se constituyen con complejas fórmulas matemáticas y algoritmos de color.

Con la información por escrito, los alumnos, de manera individual deben leer el documento que se les entrega y volver a contestar a las mismas tres preguntas planteadas en la primera sesión: ¿qué es un fractal?, ¿qué relación tiene con las matemáticas?, ¿qué utilidad tienen los fractales?, pero ahora se les pide que no copien literalmente sino que interpreten con sus propias palabras.

Resultados

Primera sesión

Han copiado literalmente lo que aparecía en pantalla, de manera que utilizan expresiones y términos complicados para su nivel académico, como por ejemplo: “*Un fractal es un objeto que exhibe recursividad o autosimilitud, a cualquier escala.*”, “*Es un concepto matemático acuñado*” ó “*K. Weierstrass definió una curva continua no diferenciable*”.

La mayoría de los alumnos ha utilizado el buscador *google*. Además, sólo toman nota de la información que encuentran en la primera página que les ha ofrecido un único buscador, aunque se les insiste que busquen en otras páginas diferentes.

Segunda sesión

Durante la lectura del documento que se les entregado, los alumnos comienzan a preguntar por el significado de numerosos términos. Se les recuerda que esos términos los han elegido ellos y que en la primera sesión nadie se planteó su significado. Es importante que tengan claro que buscar información no es copiar por copiar, sino ir entendiendo lo que se lee.

Después de analizar sus respuestas, hemos observado que son numerosos los que siguen copiando literalmente, aunque los términos no queden claros y no sepan de qué se está hablando. Los restantes parecen haber captado la idea y dan una interpretación bastante aceptable de lo que se les pedía.

Veamos a continuación las respuestas que han dado a las cuestiones planteadas:

- ¿Qué entiendes por fractal?

Algo que les ha quedado claro a la gran mayoría es que un fractal es algo geométrico. Añaden a este carácter geométrico que: es una figura que se repite en diferentes escalas, que se van formando por pasos o que es muy complicada o extraña, y que hay que hacerlo con ordenador y se necesita mucha paciencia.

- ¿Qué relación tiene con las matemáticas?

Todos los alumnos ven claramente su relación con la geometría. Unos pocos añaden una relación con las matemáticas porque “*para todo se calcula*”.

- ¿Qué utilidad tiene?

Las utilidades que han encontrado son las siguientes: se puede utilizar para meteorología, medicina, economía; sirve para trabajar con modelos de la realidad más pequeños, por ejemplo, la talla de un pantalón; trayectorias de satélites; modelos simplificados de la realidad. Cabe destacar la respuesta totalmente original de una

alumna que ve una relación entre los fractales y *“el icono que se suele utilizar en la nieve”*.

Resulta extraño que ningún alumno destaque la utilidad visual de los fractales, pues lo que más gustó en la primera sesión fueron los dibujos fractales que encontraron en la red.

Conclusiones

Esta experiencia ha posibilitado reflexionar sobre cómo se comportan los estudiantes al desarrollar una actividad que requiere afrontar un "nuevo problema". Este tipo de información resulta bastante útil para los docentes a la hora de planificar sus clases de manera que éstas se adecuen a las necesidades específicas de aprendizaje de cada grupo y que tengan en cuenta las competencias que se pretende desarrollar en cada caso. Nos parece pertinente que las actividades docentes se puedan adecuar, en la medida de lo posible, a los cuatro pilares de la educación: aprender a conocer, aprender a hacer, aprender a vivir y aprender a ser (Delors, 1996).

La actitud demostrada por los estudiantes cuando realizaban las actividades que les proponíamos en las dos sesiones, pone de manifiesto las dificultades para desarrollar su autonomía en un proceso de estudio o de búsqueda de informaciones específicas sobre un determinado tema. En este sentido, consideramos que es necesario elaborar actividades que contribuyan con el desarrollo de dicha competencia y permitan a los estudiantes enfrentarse a nuevas situaciones con motivación e interés de aprendizaje.

Analizar las respuestas desde una perspectiva teórica de investigación en geometría, posibilitaría el análisis de los resultados observados y, consecuentemente, identificar alternativas para algunos de los problemas que se han identificado en esta experiencia, tales como:

- Saber interpretar lo que leen.
- Seleccionar los contenidos en función de si los entienden o no, puesto que ha quedado manifiesto que a veces utilizan un vocabulario ininteligible para ellos.
- Cuestiones técnicas relacionadas con el “copiar” y “pegar” debido a que en cuanto encuentran la primera Web que trata sobre el tema buscado, empiezan a copiar, sin plantearse la posible búsqueda de otras páginas que resulten más adaptadas a su nivel cultural/curricular.

Bibliografía

- Delors, J. (1996). *La educación : encierra un tesoro*. Madrid: Santillana. UNESCO.
- Junta de Andalucía. (1992). *Decreto 148/1992*, de 14 de mayo, por el que se modifica del Decreto 106/1992, de 9 de junio, por el que se establecen las enseñanzas correspondientes a la E.S.O. en Andalucía (B.O.J.A. nº 75 de 27 de junio de 2002).
- Lornell, R. y Westerberg, J. (1999). Fractals in High School: Exploring a New Geometry. *Mathematics Teacher*, Vol. 92 (3), 261-265.
- Martínez Aroza, J. (2002). Arte fractal. En Cardeñoso, J.M., Castro E., Moreno, A. J. y Peñas M. (Eds), *Investigación en el aula de matemáticas. Resolución de Problemas*. Granada: Dpto de Didáctica de la Matemáticas y Sociedad Andaluza de Educación Matematica “Thales”.
- Peitgen, H.O., y Saupe, D. (Eds) (1988). *The Science of Fractal Images*. New York: Springer-Verlag.
- Sampedro, J. (2005). Un grupo español prueba con éxito una nueva terapia en un paciente de cáncer. *Periódico El País*, 31-5-2005.
- Taylor, M. (1999). Exploring fractals in the classroom. *Mathematics Teacher* 92 (4), 360-366.

Páginas Web utilizadas por los alumnos

- www.quanta.net.p4/zfractal/intro.htm
- www.arrakis.es/~sysifus/histfr.html
- www.google.es
- www.astrocosmo.cl/glosario/glosar-f.htm
- www.wikipedia.es.org
- www.diccionariadigitales.com